算法设计与分析前四课月考试卷（训练版）

满分 100 分；建议用时 90 分钟；下标从 0 开始。除特别说明外，渐近分析默认一次比较、数组访问和机器字范围内算术运算均为常数时间。

一、合并重叠区间（25 分）

给定 n 个闭区间 $[l_1, r_1], [l_2, r_2], \ldots, [l_n, r_n]$，其中 $l_i \le r_i$。请设计一个时间复杂度尽可能低的算法，合并所有相交的区间（含端点相接），使输出区间互不相交，并按左端点递增排列。

例如：

$$[[15, 18], [1, 3], [8, 10], [3, 6]] \to [[1, 6], [8, 10], [15, 18]].$$

要求：

1. 写出算法或伪代码，并说明排序关键字。（10 分）
2. 对上述样例写出排序后的序列和扫描过程。（6 分）
3. 证明算法正确，并给出时间、空间复杂度。（9 分）

二、旋转升序数组中的二分查找（25 分）

给定一个严格递增数组在某个未知位置旋转后的结果 $A = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}]$。例如 $[0, 1, 2, 4, 5, 6, 7]$ 旋转后可得到 $[4, 5, 6, 7, 0, 1, 2]$。给定目标值 s，要求在 $O(\log n)$ 时间内返回其下标；若不存在，返回 -1。

要求：

1. 写出算法或伪代码。（10 分）
2. 对 $A = [4, 5, 6, 7, 0, 1, 2]$，分别说明查找 $s = 0$ 和 $s = 3$ 时每轮的 l, m, r 及保留区间。（7 分）
3. 证明每轮可以安全丢弃一半区间，并分析复杂度。（8 分）

三、递推式紧确渐近界（25 分）

设 $T(n) = \Theta(1)$（当 n 不超过常数时）。分别求下列递推式的紧确渐近界，并写出所用方法或关键展开步骤：

1. $T(n) = 2T(n/2) + n^4$；
2. $T(n) = T(7n/10) + n$；
3. $T(n) = 16T(n/4) + n^2$；
4. $T(n) = 7T(n/3) + n^2$；
5. $T(n) = 7T(n/2) + n^2$；
6. $T(n) = 2T(n/4) + \sqrt{n}$；
7. $T(n) = T(n-2) + n^2$。

每小题约 3–4 分，共 25 分。不得只写答案，至少写出 $a, b, f(n)$ 的比较或展开求和。

四、快速排序与插入排序混合算法（25 分）

修改随机快速排序：当递归处理的子数组长度 **少于** k 时直接停止，不再排序；整个快速排序阶段结束后，对整个数组执行一次标准插入排序。假设元素互异，每次从当前子数组均匀随机选择枢轴，且 $2 \le k \le n$。

1. 写出算法流程，并解释为什么第一阶段结束后，不同终止小块之间不会产生逆序对。（8 分）
2. 设第一阶段结束后剩余逆序对数为 I，证明插入排序阶段时间为 $\Theta(n + I)$，并证明 $I = O(nk)$。（7 分）
3. 证明第一阶段期望时间为 $O(n \lg (n/k))$（允许保留一个 $O(n)$ 的线性项），从而得到总期望时间
$$O\left(nk + n \lg \frac{n}{k}\right).$$
（7 分）
4. 将 $k = 2, \Theta(\lg n), \Theta(\sqrt{n}), n$ 代入总上界并比较；说明理论阈值与实践阈值为什么不是同一个问题。（3 分）